

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА РАЗОМКНУТЫХ КОНТУРАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений являются активно развивающимся направлением вычислительной математики. Это связано с многочисленными приложениями гиперсингулярных интегральных уравнений в аэродинамике, электродинамике, физике и с тем обстоятельством, что аналитические решения гиперсингулярных интегральных уравнений возможны лишь в исключительных случаях. Помимо непосредственных приложений в физике и технике, гиперсингулярные интегральные уравнения возникают при приближенном решении граничных задач математической физики. В последнее время опубликован цикл работ, посвященных приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода на разомкнутых контурах интегрирования. Интерес к этим уравнениям связан с их непосредственными приложениями к аэродинамике и электродинамике. Во всех этих работах при построении вычислительных схем используются граничные условия. В данной работе предложены общие методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого и второго рода на разомкнутых контурах интегрирования. Получены оценки скорости сходимости и погрешности.

Материалы и методы. В работе используются методы функционального анализа и теории приближения. Рассмотрены линейные одномерные гиперсингулярные интегральные уравнения на разомкнутых контурах интегрирования. Построены проекционные вычислительные схемы, обоснование которых проводится на основе общей теории приближенных методов Л. В. Канторовича.

Результаты. Построены вычислительные схемы методов коллокации и механических квадратур для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования. Получены оценки скорости сходимости и погрешности вычислительных схем.

Выводы. Построены и обоснованы вычислительные схемы приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на сегменте $[-1, 1]$. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач аэродинамики, электродинамики, гидродинамики, при решении уравнений математической физики методом граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, вычислительная схема, граничные условия, разомкнутый контур интегрирования.

I. V. Boykov, A. I. Boykova

ON ONE APPROXIMATE METHOD OF SOLVING LINEAR HYPER SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS ON OPEN INTEGRATION CONTOURS

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

Abstract.

Background. Approximate methods of solving hypersingular integral equations are an actively developing area of calculus mathematics. This fact relates to multiple applications of hypersingular integral equations in aerodynamics, electrodynamics, physics, and also to the fact that analytical solutions of hypersingular integral equations are possible only in exceptional cases. Apart from direct applications in physics and engineering, hypersingular integral equations occur in approximate solution of boundary problems of mathematical physics. Recently, there have been published several works, devoted to approximate methods of solving hypersingular integral equations of the first kind on open integration contours. The interest to such equations is associated with their direct applications in aerodynamics and electrodynamics. Boundary conditions are used in all those works when building computing schemes. The present work suggests general methods of solving hypersingular integral equations of the first and second kinds on open integration contours. The authors have obtained values of convergency rapidity and error.

Materials and methods. In the study the authors used methods of functional analysis and approximation theory. The researchers considered linear one-dimensional hypersingular integral equations on open integration contours and built projection computing schemes, which were substantiated on the basis of the general theory of approximate methods of L. V. Kantorovich.

Results. The authors built computing schemes of collocation and mechanical quadrature methods of solving hypersingular integral equations on open integration contours and obtained values of computing schemes' convergence rapidity and error.

Conclusions. The researchers built and substantiated computing schemes of approximate solution of hypersingular integral equations, determined on the segment $[-1, 1]$. The obtained results may be used in solving problems of aerodynamics, electrodynamics, in solving equations of mathematical physics by the methods of boundary integral equations.

Key words: hypersingular integral equations, computing scheme, boundary conditions, open integration contour.

Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений, зародившаяся в начале прошлого века в трудах Д. Гильберта и А. Пуанкаре, в течение последующих почти 100 лет переживает бурное развитие. По-видимому, это в первую очередь связано с многочисленными приложениями сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений и краевой задачи Римана в физике, механике и технике. Хорошо известен спектр применения сингулярных интегральных уравнений в механике и технике: теория упругости, термоупругости, аэродинамика; сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения являются одним из основных аппаратов математического моделирования задач электродинамики.

Не менее широки области применения краевой задачи Римана, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в физике: квантовая теория поля [1], теория близкого и дальнего взаимодействия [2], теория солитонов [3].

Однако решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях, и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. Подробное изложение численных методов решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений содержится в работах [4–18], в которых также имеется обширная библиография.

Разработка численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений представляет значительный интерес не только для решения прикладных задач, непосредственно сводящихся к гиперсингулярным интегральным уравнениям, но и при решении многочисленных задач, сводящихся к сингулярным и слабосингулярным интегральным уравнениям.

Отметим, что к слабосингулярным интегральным уравнениям сводятся задачи астрофизики, томографии и т.д. [12].

В работе [15] показано, что к гиперсингулярным интегральным уравнениям при ряде дополнительных условий сводятся сингулярные и слабосингулярные интегральные уравнения первого рода.

Переход к гиперсингулярным интегральным уравнениям особенно удобен при решении слабосингулярных интегральных уравнений первого рода. Известно, что последние являются некорректными и их решение требует методов регуляризации. В описанном в работе [15] подходе некорректность сохраняется в операции дифференцирования, но ее преодоление в данном случае значительно проще.

Таким образом, как многочисленные приложения, так и собственно вычислительные задачи делают актуальной проблему разработки численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений.

В работах [10, 11] предложен сплайн-коллокационный метод решения одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений и доказана его сходимость. Однако точность предлагаемого метода существенно зависит от коэффициентов уравнения и класса функций, к которым принадлежит точное решение. В работах [15–18] предложены сплайн-коллокационные методы нулевого и первого порядков решения одномерных, полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегральных уравнений.

К настоящему времени практически не разработаны общие проекционные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования.

Данная статья посвящена построению и обоснованию методов коллокации и механических квадратур решения одномерных линейных гиперсингулярных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования.

В разделе 2, предлагаются и обосновываются методы коллокации и механических квадратур для приближенных решений гиперсингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1, \quad p = 2, 3, \dots \quad (1)$$

1. Вспомогательные утверждения

Напомним определение гиперсингулярных интегралов.

В работе [19] Ж. Адамар ввел новый тип особых интегралов.

Определение 1.1. Интеграл вида

$$\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}} \quad (2)$$

при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла, как предел при $x \rightarrow b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}},$$

если предположить, что $A(x)$ имеет p производных в окрестности точки b . Здесь $B(x)$ – любая функция, на которую налагаются два условия:

- рассматриваемый предел существует;
- $B(x)$ имеет по крайней мере p производных в окрестности точки $x = b$.

Произвольный выбор $B(x)$ никак не влияет на значение получаемого предела: первое условие определяет значения $(p-1)$ первых производных от $B(x)$ в точке b , так что произвольный добавочный член в числителе есть бесконечно малая величина, по меньшей мере порядка $(b-x)^p$.

В работе Л. А. Чикина [20] дано определение интеграла типа Коши – Адамара, обобщающее понятия интеграла в смысле главного значения Коши и интеграла в смысле Адамара.

Определение 1.2. Интегралом

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p}, \quad a < c < b,$$

в смысле главного значения Коши – Адамара будем называть следующий предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$$

где $\xi(v)$ – некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

Опишем классы функций, используемые в статье.

Определение 1.3. Класс функций Гельдера $H_\alpha(M;[a,b])$ ($0 < \alpha \leq 1$) состоит из заданных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого отрезка неравенству $|f(x') - f(x'')| \leq M |x' - x''|^\alpha$.

Определение 1.4. Класс $W^r(M;[a,b])$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a,b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Определение 1.5. Класс $W^r H_\alpha(M;[a,b])$ состоит из функций $f(x)$, принадлежащих классу $W^r(M;[a,b])$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M)$.

Замечание. В случае, если необходимо подчеркнуть, что $|f^{(r)}(x)| \leq M_1$ и $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M_2)$, то будем писать $W^r(M_1)H_\alpha(M_2)$.

В случае, когда из текста ясно, на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M;[a,b])$ будем писать $H_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

Определение 1.6. Через $H_{\omega_1\omega_2}(D)$ обозначен класс определенных на $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ функций $f(x, y)$ таких, что для любых точек (x', y') и (x'', y'') из D справедливо неравенство

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq w_1(|x' - x''|) + w_2(|y' - y''|),$$

где $w_1(\sigma)$ и $w_2(\sigma)$ – заданные модули непрерывности. В случаях, когда $w_i(x) = M_i x^{\alpha_i}$ ($i = 1, 2$), используется обозначение $H_{\alpha_1\alpha_2}(M, D)$, где $M = \max(M_1, M_2)$.

Определение 1.7. $W^{r,s}(D, M)$, $D = [a, b; c, d]$, $0 < M < \infty$, означает класс определенных на D функций $f(x, y)$, имеющих частные производные $f^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \partial^{\alpha+\beta} f(x, y) / \partial x^\alpha \partial y^\beta$ ($0 \leq \alpha \leq r, 0 \leq \beta \leq s$), причем

$$\|f^{(r,s)}(x, y)\|_{C(D)} \leq M, \quad \|f^{(r,j)}(x, 0)\|_{C(D)} \leq M, \quad j = 0, 1, \dots, s-1,$$

$$\|f^{(i,s)}(0, y)\|_{C(D)} \leq M, \quad i = 0, 1, \dots, r-1.$$

Определение 1.8. Класс $W^{r,s}H_{\alpha,\alpha}$ состоит из функций $f(x, y)$, принадлежащих классу $W^{r,s}(M;[a,b])$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r,s)}(x) \in H_{\alpha,\alpha}$.

Пусть $f(x) \in H_\alpha(M;[a,b])$. Ниже используется обозначение

$$H(f, \alpha) = \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}.$$

2. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим линейное гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), -1 < t < 1, \quad p = 2, 3, \dots \quad (3)$$

Будем считать, что функции $a(t)$, $b(t) \in W^r H_\alpha$, $h(t, \tau) \in W^{r,r} H_{\alpha\alpha}$; функция $f(t)$ представима в виде $f(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{p-1}} \varphi(t)$, где $\varphi(t) \in H_\alpha$,

$0 < \alpha < 1$. Подобное представление функции $f(t)$ следует из определения гиперсингулярных интегралов.

Исследуем гладкость функции $g(t) = \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}$ в предположении, что

$$x(t) \in W^p H_\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Из определения гиперсингулярных интегралов следует, что при $-1 < t < 1$ и $x(t) \in W^p H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau = -x(1) \frac{1}{(p-1)(1-t)^{p-1}} + x(-1) \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)(1+t)^{p-1}} + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau-t} = \\ &= \frac{1}{(1-t^2)^{p-1}} \left(\eta_1(t) + \dots + \eta_{p-1}(t) + \frac{(1-t^2)^{p-1}}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau \right), \end{aligned}$$

где $\eta_1(t), \dots, \eta_{p-1}(t)$ – полиномы $(p-1)$ -го порядка.

Представим сингулярный интеграл в виде

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_{-1}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau) - x^{(p-1)}(t)}{\tau-t} d\tau + x^{(p-1)}(t) \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\tau-t}.$$

Второе слагаемое равно $x^{(p-1)}(t) \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right|$.

Исследуем гладкость интеграла

$$g_1(t) = \int_{-1}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau) - x^{(p-1)}(t)}{\tau-t} d\tau.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} g_1(t+h) - g_1(t) &= \int_{-1}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau) - x^{(p-1)}(t+h)}{\tau-t-h} d\tau - \int_{-1}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau) - x^{(p-1)}(t)}{\tau-t} d\tau = \\ &= \int_{-1-h}^{1-h} \frac{x^{(p-1)}(\tau+h) - x^{(p-1)}(t+h)}{\tau-t} d\tau - \int_{-1}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau) - x^{(p-1)}(t)}{\tau-t} d\tau = \\ &= \int_{-1-h}^{-1} \frac{x^{(p-1)}(\tau+h) - x^{(p-1)}(t+h)}{\tau-t} d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \int_{-1}^{1-h} \frac{(x^{(p-1)}(\tau+h) - x^{(p-1)}(\tau)) - (x^{(p-1)}(t+h) - x^{(p-1)}(t))}{\tau-t} d\tau +$$

$$+ \int_{1-h}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau) - x^{(p-1)}(t)}{\tau-t} d\tau = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим модули каждого из выражений I_1, I_2, I_3 в отдельности:

$$|I_1| \leq \int_{-1-h}^{-1} \frac{H(x^{(p-1)}, \alpha)}{|\tau-t|^{1-\alpha}} d\tau \leq C(|1+t+h|^\alpha - |1+t|^\alpha) \leq Ch^\alpha;$$

$$|I_3| \leq \int_{-1-h}^1 \frac{H(x^{(p-1)}, \alpha)}{|\tau-t|^{1-\alpha}} d\tau \leq Ch^\alpha,$$

$$|I_2| \leq \int_{-1}^{1-h} \frac{C|\tau-t|^{\alpha\gamma} h^{\alpha(1-\gamma)}}{|\tau-t|} d\tau \leq Ch^{\alpha(1-\gamma)} \left| |1-h-t|^{\alpha\gamma} - |1+t|^{\alpha\gamma} \right| \leq Ch^{\alpha(1-\gamma)},$$

где γ – произвольное число, $0 < \gamma < \alpha$. В качестве γ можно взять произвольное как угодно малое число.

При получении оценки $|I_2|$ были использованы следующие неравенства:

$$|(x^{(p-1)}(\tau+h) - x^{(p-1)}(\tau)) - (x^{(p-1)}(t+h) - x^{(p-1)}(t))| \leq Ch^\alpha;$$

$$|(x^{(p-1)}(\tau+h) - x^{(p-1)}(\tau)) - (x^{(p-1)}(t+h) - x^{(p-1)}(t))| =$$

$$= |(x^{(p-1)}(\tau+h) - x^{(p-1)}(t+h)) - (x^{(p-1)}(\tau) - x^{(p-1)}(t))| \leq C|\tau-t|^\alpha,$$

отсюда

$$\left| (x^{(p-1)}(\tau+h) - x^{(p-1)}(\tau)) - (x^{(p-1)}(t+h) - x^{(p-1)}(t)) \right| \leq$$

$$\leq Ch^{\alpha(1-\gamma)} |\tau-t|^{\alpha\gamma}.$$

Таким образом, функция $g_1(t)$ принадлежит классу функций Гельдера с показателем $\alpha - \varepsilon$, где ε – как угодно малое число.

Из сказанного следует, что при $x(t) \in W^{(p-1)}H_\alpha$ справедливо представление

$$\int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau = \frac{1}{(1-t^2)^{p-1}} \eta(t),$$

где $\eta(t)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера с показателем $(\alpha - \varepsilon)$, где ε – как угодно малое число.

В случае, если $x(t) \in W^p H_\alpha$, то имеем

$$g(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{p-1}} (\eta_1(t) + \dots + \eta_{p-1}(t) + \frac{(1-t^2)^{p-1}}{(p-1)!} x^{(p-1)}(1) \ln |1-t| - \\ - \frac{(1-t^2)^{p-1}}{(p-1)!} x^{(p-1)}(1) \ln |1+t| - \frac{(1-t^2)^{p-1}}{(p-1)!} \int_{-1}^1 x^{(p)}(\tau) \ln |\tau-t| d\tau).$$

Оценим гладкость интеграла $g_2(t) = \int_{-1}^1 x^{(p)}(\tau) \ln |\tau-t| d\tau$. Очевидно,

$$|g_2(t+h) - g_2(t)| = \left| \int_{-1}^1 x^{(p)}(\tau) \ln |\tau-t-h| d\tau - \int_{-1}^1 x^{(p)}(\tau) \ln |\tau-t| d\tau \right| = \\ = \left| \int_{-1-h}^{1-h} x^{(p)}(\tau+h) \ln |\tau-t| d\tau - \int_{-1}^1 x^{(p)}(\tau) \ln |\tau-t| d\tau \right| \leq \\ \leq \left| \int_{-1-h}^{-1} x^{(p)}(\tau+h) \ln |\tau-t| d\tau \right| + \left| \int_{-1}^{1-h} (x^{(p)}(\tau+h) - x^{(p)}(\tau)) \ln |\tau-t| d\tau \right| + \\ + \left| \int_{1-h}^1 x^{(p)}(\tau) \ln |\tau-t| d\tau \right| = I_4 + I_5 + I_6.$$

Пусть $-1 < t < -h$. Пусть $M_p = \max |x^{(p)}(t)|$. Тогда при $0 < \alpha < 1$

$$I_4 \leq M_p \int_{-1-h}^{-1} |\ln |\tau-t|| d\tau \leq \\ \leq M_p |(1+t+h) \ln |1+t+h| - (1+t) \ln |1+t|| + M_p |(1+h+t) - (1+t)| \leq \\ \leq M_p (h |\ln |1+t+h|| + (1+t) |\ln |1+t+h| - \ln |1+t||) \leq \\ \leq M_p \left(h |\ln h| + (1+t) \left| \ln \frac{1+t}{1+t+h} \right| \right) = M_p \left(h |\ln h| + (1+t) \left| \ln \left(1 - \frac{h}{1+t+h} \right) \right| \right) \leq \\ \leq M_p h |\ln h| + (1+t) \left| \frac{h}{1+t+h} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{1+t+h} \right)^2 + \dots \right| \leq M_p (h |\ln h| + Ch) \leq M_p h^\alpha.$$

Пусть $t = -1$, тогда

$$I_4 \leq M_p \int_{-1-h}^{-1} |\ln |\tau-t|| d\tau = M_p (h \ln h + h) \leq Ch^\alpha, \quad I_6 \leq Ch^\alpha,$$

$$I_5 \leq CH(x^{(p)}, \alpha)h^\alpha.$$

При остальных значениях t имеем аналогичные оценки.

Следовательно, $g_2(t) \in H_\alpha$, и при $x \in W^{(p)}H_\alpha$ справедливо представление

$$\int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} = \frac{1}{(1-t^2)^{p-1}}\eta(t), \text{ где } \eta(t) \in H_\alpha.$$

Введем пространство X , состоящее из функций, имеющих непрерывные производные до p -го порядка, а p -я производная удовлетворяет условию Гельдера H_β с показателем β ($0 < \beta < \alpha < 1$). Норма в пространстве X вводится выражением

$$\|x(t)\| = \sum_{k=0}^p \max_{-1 \leq t \leq 1} |x^{(k)}(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|x^{(p)}(t_1) - x^{(p)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Через Y обозначим весовое пространство, состоящее из функций $y(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{p-1}}\varphi(t)$, где $\varphi(t) \in H_\beta$.

Норму в пространстве Y введем формулой

$$\|y\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \quad 0 < \beta < \alpha < 1.$$

Нетрудно видеть, что оператор K отображает пространство X в пространство Y . Будем считать, что оператор K имеет линейный обратный оператор $K^{-1} \in [Y, X]$.

Так как уравнение (3) рассматривается на интервале $(-1, 1)$, то оно эквивалентно следующему:

$$Ux \equiv (1-t^2)^{p-1} \left(a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau \right) = (1-t^2)^{p-1} f(t). \quad (4)$$

Введем пространство Z , состоящее из функций, удовлетворяющих условию Гельдера H_β , $0 < \beta < \alpha$. Норма в пространстве Z определяется формулой

$$\|z(t)\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |z(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|z(t_1) - z(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Оператор U отображает пространство X в пространство Z .

Так как по предположению оператор K непрерывно обратим, то уравнение (4) однозначно разрешимо при любой правой части, принадлежащей пространству Z . Отсюда и из теоремы Банаха [21] следует, что оператор $U \in [X, Z]$ непрерывно обратим.

Приближенное решение уравнения (3) (и, следовательно, уравнения (4)) будем искать в виде полинома $x_N(t)$ степени $(N-1)$ с неизвестными

$$\text{коэффициентами: } x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k t^k.$$

Через L_N обозначим проектор, отображающий пространство $C[-1,1]$ на множество интерполяционных полиномов степени $(N-1)$, построенным по узлам полинома Чебышева первого рода N -го порядка.

На элементы пространства Y оператор L_N действует по формуле

$$L_N \left[\frac{1}{(1-t^2)^{p-1}} \varphi(t) \right] = \frac{1}{(1-t^2)^{p-1}} L_N [\varphi(t)].$$

Через P_N обозначим проектор, отображающий пространство $C[-1,1]$ на множество интерполяционных полиномов степени $(N-1)$, построенным по узлам полинома Лежандра N -го порядка.

Полином $x_N(t)$ представим в виде

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \psi_k(t), \quad (5)$$

где $\psi_k(t)$, $k=1,2,\dots,N$, – фундаментальные многочлены по узлам полинома Лежандра.

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются по методу механических квадратур, который в операторной форме имеет вид

$$\begin{aligned} K_N x_N \equiv L_N \left[a(t)x_N(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 P_N^\tau [h(t,\tau)x_N(\tau)] d\tau \right] = L_N [f(t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Верхний индекс у оператора P_N^τ означает, что проектирование проводится по переменной τ .

Из определения оператора L_N на пространстве Y следует, что уравнение (6) при $-1 < t < 1$ эквивалентно следующему:

$$U_N x_N \equiv L_N \left[(1-t^2)^{p-1} \left(a(t)x_N(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x_N(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + \right. \right.$$

$$+ \int_{-1}^1 P_N^\tau [h(t, \tau) x_N(\tau)] d\tau \Bigg] = L_N[(1-t^2)^{p-1} f(t)]. \quad (7)$$

Наряду с пространствами X и Y введем их подпространства X_N и Y_N соответственно. Подпространство X_N состоит из полиномов вида

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k t^k. \quad \text{Подпространство } Y_N \text{ состоит из функций вида}$$

$$y_N(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{p-1}} \psi_N(t), \quad \text{где } \psi_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k t^k.$$

Норма в подпространстве X_N определяется формулой

$$\|x_N(t)\| = \sum_{k=0}^p \max_{-1 \leq t \leq 1} |x_N^{(k)}(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|x_N^{(p)}(t_1) - x_N^{(p)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Норма в подпространстве Y_N на элементе $y_N(t) = \frac{1}{(1-t^2)} \psi(t)$ определяется формулой

$$\|y_N(t)\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} \psi_N(t) + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\psi_N(t_1) - \psi_N(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Нетрудно видеть, что оператор U_N отображает подпространство X_N в Y_N .

Введем подпространство Z_N пространства Z , состоящее из полиномов степени $(N-1)$ с нормой

$$\|z_N\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |z_N(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|z_N(t_1) - z_N(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Покажем, что если оператор U непрерывно обратим, то при достаточно больших значениях N системы уравнений (6) и (7) однозначно разрешимы.

Замечание. Вместо непрерывной обратимости оператора U достаточно потребовать его обратимости слева или справа [9].

Введем оператор

$$\bar{U}_N x \equiv P_N \left[(1-t^2) \left(a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau) d\tau \right) \right] \quad (8)$$

и оценим норму $\|(U - \bar{U}_N)x\|$ в метрике пространства Z .

Очевидно,

$$\|(U - \bar{U}_N)x\|_{C[-1,1]} \leq \|R_N[(1-t^2)^{p-1} a(t)x(t)]\|_{C[-1,1]} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\| R_N \left[(1-t^2)^{p-1} b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right] \right\|_{C[-1,1]} + \\
 & + \left\| R_N \left[(1-t^2)^{p-1} \int_{-1}^1 h(t, \tau) x(\tau) d\tau \right] \right\|_{C[-1,1]} = I_7 + I_8 + I_9, \quad (9)
 \end{aligned}$$

где $R_N = E - L_N$, E – тождественный оператор.

Оценим каждое слагаемое в отдельности.

Нетрудно видеть, что

$$I_7 \leq C(\ln N) E_N[(1-t^2)^{p-1} a(t)x(t)] \leq \frac{C \ln N \|x^{(p)}(t)\|_{C[-1,1]}}{N^p} = \frac{C \ln N \|x\|_X}{N^p}.$$

Здесь используется неравенство [22] $\|L_N\| \leq 8 + \frac{4}{\pi} \ln N$.

Прежде чем оценивать I_8 , исследуем гладкость функции

$$u(t) = (1-t^2)^{p-1} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau.$$

Воспользовавшись определением гиперсингулярного интеграла и повторяя проведенные выше рассуждения, имеем

$$\begin{aligned}
 u(t) = & -\frac{x(1)(1+t)^{p-1}}{p-1} + \frac{x(-1)(-1)^{p-1}(1-t)^{p-1}}{p-1} + \dots + \\
 & + (1-t^2)^{p-1} \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 \frac{x^{(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-t} = -\frac{x(1)(1+t)^{p-1}}{p-1} + \\
 & + \frac{x(-1)(-1)^{p-1}(1-t)^{p-1}}{p-1} + \dots + (1-t^2)^{p-1} \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^1 x^{(p)}(\tau) \ln |\tau-t| d\tau.
 \end{aligned}$$

Выше было показано, что $u(t) \in H_\alpha$ и $\omega(u, \delta) \leq C \|x^{(p)}\| \delta$.

Следовательно,

$$I_8 \leq \frac{C}{N^\alpha} \|x\|_X. \quad (10)$$

Приступим к оценке интеграла I_9 . Так как функция

$$g_3(t) = \int_{-1}^1 h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad x \in X,$$

принадлежит классу функций $W^r H_\alpha$, то

$$I_9 \leq \frac{C \|x\|_X \ln N}{N^r}. \quad (11)$$

Из неравенств (9)–(11) следует, что

$$\|(U - \bar{U}_N)x\|_{C[-1,1]} \leq \frac{C \|x\|_X \ln N}{n^\alpha}. \quad (12)$$

Здесь предполагается, что $2p \leq r$.

Так как $\bar{L}_N x$ является полиномом $(N-1)$ -го порядка, то из результатов разд. 2 статьи [23] следует неравенство $\|(U - \bar{U}_N)x\|_Y \leq \frac{C \|x\|_X \ln N}{n^{\alpha-\beta}}$.

Так как по предположению оператор $U \in [X, Y]$ имеет линейный обратный, то он имеет левый обратный оператор и по теореме о левом обратном операторе [24] $\|Ux\| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|} \|x\|$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\bar{U}x_N\| &= \|\bar{U}_N x_N - Ux_N - Ux_N\| \geq \|Ux_N\| - \|(U - \bar{L}_N)x_N\| \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{\|U^{-1}\|} - \|U - \bar{U}_N\| \right) x_N \geq \varepsilon \|x_N\|. \end{aligned}$$

По теореме о левом обратном операторе оператор $\bar{U}_N$ имеет левый обратный оператор с нормой $\|(\bar{U}_N)^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Рассмотрим уравнение

$$\bar{U}_N x_N = L_N \left[(1-t^2)f(t) \right]. \quad (13)$$

Так как оператор $\bar{U}_N$ имеет левый обратный на конечномерном подпространстве X_N , то он имеет обратный оператор с нормой $\|\bar{U}_N^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, уравнение (13) однозначно разрешимо.

Обозначим через x^* и $\tilde{x}^*$ решения уравнений (13) и $Ux = P_N \left[(1-t^2)f(t) \right]$. Так как функция $(1-t^2)^{p-1}f(t) \in H_\alpha$, то

$$\|R_N[(1-t^2)^{p-1}f(t)]\|_Y \leq \frac{C \ln N}{N^{\alpha-\beta}}.$$

Из теоремы Банаха [21] следует, что

$$\|x^* - \tilde{x}^*\|_X \leq \frac{C \ln N}{N^{\alpha-\beta}}. \quad (14)$$

Обозначим через $\bar{x}_N^*$ решение уравнения (13). Очевидно,

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}^* - \bar{x}_N^*\| &= \|U^{-1}(U - \bar{U}_N)\bar{U}_N^{-1}P_N[1-t^2]^{p-1}f(t)\| \leq \\ &\leq \|U^{-1}(L - \bar{U}_N)\bar{x}_N^*\| \leq \frac{C}{N^{\alpha-\beta}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует, что

$$\|x^* - \bar{x}_N^*\| \leq \frac{C}{N^{\alpha-\beta}}.$$

Так как $\int_{-1}^1 P_N[h(t, \tau)x_N(\tau)]d\tau$ является квадратурной формулой Гаусса для интеграла $\int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau$, то

$$\int_{-1}^1 P_N[h(t, \tau)x_N(\tau)]d\tau = \int_{-1}^1 P_N[h(t, \tau)]x_N(\tau)d\tau.$$

Оценка $\|\bar{K}_N - K_N\| \leq \frac{C \ln N}{N^{\alpha-\beta}}$ очевидна. Следовательно, при N таких, что $\frac{C}{N^{\alpha-\beta}} < 1$, система уравнений (7) однозначно разрешима и справедливо неравенство

$$\|\bar{x}_N^* - x_N^*\| \leq \frac{C \ln N}{N^{\alpha-\beta}}. \quad (16)$$

Из неравенств (15), (16) следует оценка

$$\|x^* - x_N^*\| \leq \frac{C \ln N}{N^{\alpha-\beta}}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть оператор K непрерывно обратим и выполнены условия:

- 1) $a(t), b(t) \in W^r H_\alpha, r \geq p, 0 < \alpha < 1$;
- 2) $h(t, \tau) \in W^{rr} H_{\alpha\alpha}, r \geq p, 0 < \alpha < 1$;
- 3) $f(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{p-1}} \varphi(t), \varphi(t) \in H_\alpha$.

Тогда при N таких, что $q = CN^{-(\alpha-\beta)} \ln N < 1, 0 < \beta < \alpha < 1$, система уравнений (7) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|x^* - x_N^*\| \leq C \frac{\ln N}{N^{(\alpha-\beta)}},$$

где x^* и x_N^* – решения уравнений (3) и (4) соответственно.

Список литературы

1. **Боголюбов, Н. Н.** Применение методов Н. И. Мусхелишвили в теории элементарных частиц / Н. Н. Боголюбов, В. А. Мещеряков, А. Н. Тавхелидзе // Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. – Тбилиси : Мецниереба, 1971. – Т. 1. – С. 5–11.
2. **Баун, Дж. Е.** Нуклон-нуклонное взаимодействие / Дж. Е. Баун, Э. Д. Джексон. – М. : Атомиздат., 1975. – 248 с.
3. **Тахтаджян, Л. А.** Гамильтонов подход в теории солитонов / Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. – М. : Наука, 1986. – 528 с.
4. **Иванов В. В.** Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. – Киев : Наукова думка, 1968. – 287 с.
5. **Гохберг, И. Ц.** Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. – М. : Наука, 1971. – 352 с.
6. **Michlin, S. G.** Singulare Integraloperatoren / S. G. Michlin, S. Prossdorf. – Berlin : Acad. Verl., 1980. – 514 s.
7. **Prossdorf, S.** Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations / S. Prossdorf, B. Silbermann. – Berlin : Acad. Verl., 1991. 544 p.
8. **Вайникко, Г. М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М. : Янус-К., 2001. – 508 с.
9. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. – 316 с.
10. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // International Conference on Computational Mathematics. Part first. – Novosibirsk, 2004. – P. 411–417.
11. **Бойков, И. В.** Коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – 2006. – № 5. – С. 42–50.
12. **Сизиков, В. С.** Численное решение сингулярного интегрального уравнения / В. С. Сизиков, А. В. Смирнов, Б. А. Федоров // Известия вузов. Математика. – 2004. – Т. 8. – С. 62–70.
13. **Capobiano, M. R.** On the numerical solution of a nonlinear integral equation of Prandtl's type / M. R. Capobiano, G. Criscuolo, P. Junghanns // Operator Theory: Advances and Applications. – 2005. – Vol. 160. – P. 53–79.
14. **Оселедец, И. В.** Приближенное обращение матриц / И. В. Оселедец, Е. Е. Тыртышников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45, № 2. – С. 315–326.
15. **Boykov, I. V.** An approximate solution of hypersingular integral equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics. – 2010. – Vol. 60, Issue 6. – P. 607–628.
16. **Boykov, I. V.** An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, V. A. Roudnev, A. I. Boykova // Applied Numerical Mathematics. – 2014. – Vol. 86, December. – P. 1–21.
17. **Бойков, И. В.** Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокаций / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова,

- М. А. Сёмов, А. А. Есафьев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 101–113.
18. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода / И. В. Бойков, А. И. Бойкова, М. А. Сёмов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 91–107.
19. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
20. **Чикин, Л. А.** Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Ученые записки Казанского государственного университета. – 1953. – Т. 113. – Кн. 10. – С. 57–105.
21. **Люстерник, Л. А.** Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука. 1965. – 510 с.
22. **Натансон, И. П.** Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М. : Л., 1949. – 688 с.
23. **Бойков, И. В.** Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма с интегралом в смысле главного значения Коши – Адамара / И. В. Бойков // Функциональный анализ и теория функций. – Вып. 7. – Казань : Изд-во КГУ, 1970. – С. 3–23.
24. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

References

1. Bogolyubov N. N., Meshcheryakov V. A., Tavkhelidze A. N. *Trudy simpoziuma po mekhanike sploshnoy sredy i rodstvennykh problemam analiza* [Proceedings of the symposium on continuum mechanics and associated analysis problems]. Tbilisi: Metsniereba, 1971, vol. 1, pp. 5–11.
2. Baun Dzh. E., Dzhekson E. D. *Nuklon-nuklonnoe vzaimodeystvie* [Nucleon-nucleon interaction]. Moscow: Atomizdat., 1975, 248 p.
3. Takhtadzhyan L. A., Faddeev L. D. *Gamil'tonov podkhod v teorii solitonov* [Hamilton approach in the soliton theory]. Moscow: Nauka, 1986, 528 p.
4. Ivanov V. V. *Teoriya priblizhennykh metodov i ee primeneniye k chislennomu resheniyu singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [The theory of approximate methods and its application in numerical solution of hypersingular integral equations]. Kiev: Naukova dumka, 1968, 287 p.
5. Gokhberg I. Ts., Fel'dman I. A. *Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* [Equations in bundles and projection methods of solving thereof]. Moscow: Nauka, 1971, 352 p.
6. Michlin S. G., Prossdorf S. *Singulare Integraloperatoren*. Berlin: Acad. Verl., 1980, 514 p.
7. Prossdorf S., Silbermann B. *Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations*. Berlin: Acad. Verl., 1991, 544 p.
8. Vaynikko G. M., Lifanov I. K., Poltavskiy L. N. *Chislennyye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya* [Numerical methods in hypersingular integral equations and applications thereof]. Moscow: Yanus-K., 2001, 508 p.
9. Boykov I. V. *Priblizhennyye metody resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Approximate methods of solving singular integral equations]. Penza: Izd-vo PGU, 2004, 316 p.
10. Boykov I. V., Romanova E. G. *International Conference on Computational Mathematics. Part first*. Novosibirsk, 2004, pp. 411–417.

11. Boykov I. V., Romanova E. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Estestvennye nauki* [University proceedings. Volga region. Natural sciences]. 2006, no. 5, pp. 42–50.
12. Sizikov V. S., Smirnov A. V., Fedorov B. A. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2004, vol. 8, pp. 62–70.
13. Capobianco M. R., Criscuolo G., Junghanns P. *Operator Theory: Advances and Applications*. 2005, vol. 160, pp. 53–79.
14. Oseledets I. V., Tyrtysnikov E. E. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2005, vol. 45, no. 2, pp. 315–326.
15. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. *Applied Numerical Mathematics*. 2010, vol. 60, issue 6, pp. 607–628.
16. Boykov I. V., Ventsel E. S., Roudnev V. A., Boykova A. I. *Applied Numerical Mathematics*. 2014, vol. 86, December, pp. 1–21.
17. Boykov I. V., Zakharova Yu. F., Semov M. A., Esaf'ev A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 3 (31), pp. 101–113.
18. Boykov I. V., Boykova A. I., Semov M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2015, no. 3 (35), pp. 91–107.
19. Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [The Cauchy problem for linear equations with partial derivatives of hyperbolic type]. Moscow: Nauka, 1978, 351 p.
20. Chikin L. A. *Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of Kazan State University]. 1953, vol. 113, bk. 10, pp. 57–105.
21. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Functional analysis elements]. Moscow: Nauka, 1965, 510 p.
22. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow; Leningrad, 1949, 688 p.
23. Boykov I. V. *Funktsional'nyy analiz i teoriya funktsiy* [Functional analysis and theory of functions]. Issue 7. Kazan: Izd-vo KGU, 1970, pp. 3–23.
24. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka, 1977, 742 p.

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Il'ya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of higher and applied mathematics, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Бойкова Алла Ильинична

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра высшей и прикладной
математики, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Boykova Alla Il'inichna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.392

Бойков, И. В.

Об одном приближенном методе решения линейных гиперсингулярных интегральных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С. 27–44. DOI 10.21685/2072-3040-2016-2-3